Aufgaben (und Lösungen)

Axel Schmale[1]

6. März 2020

[1]Hamburg

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Aufgaben

Kapitel 1

e^π, π^e

Aufgabe: Was ist größer: e^π oder π^e?

Kapitel 2

Preise in 7-11?

Ein Kunde kauft in einem der 7-11-Geschäfte vier Teile und will an der Kasse bezahlen. Der Kassierer benutzt seinen Taschenrechner und gibt an, dass 7,11$ zu bezahlen sind.
Der Kunde versucht einen Spaß: „7,11 nur weil der Laden 7-11 heißt?“
Der Kassierer: „Natürlich nicht, ich habe alle Einzelpreise miteinander multipliziert und das ist das Ergebnis.“
Der Kunde irritiert: „Multipliziert? Sie sollten addieren.“
Darauf der Kassierer: „Entschuldigung, ich habe mich geirrt.“
Er addiert die vier Einzelpreise und verkündet: „Es kostet trotzdem 7,11$“

Aufgabe: Wie lauten die vier Einzelpreise?

Kapitel 3

Händeschütteln

Herr Schmidt und seine Frau laden vier andere Paare zu einer Party ein. Nachdem alle eingetroffen sind, haben einige der Anwesenden mit einigen anderen die Hände geschüttelt. Natürlich hat niemand seinem Partner die Hand gegeben und niemand hat der selben Person zweimal die Hand geschüttelt. Anschließend fragt Herr Schmidt jeden Anwesenden wie oft dieser einer Person die Hand gegeben hat. Er erhält unterschiedliche Antworten von jedem.

Aufgabe: Wie oft hat Frau Schmidt jemandem die Hand gegeben?

Kapitel 4

Standfeste Cola-Dose

Aufgabe: Wieviel muss aus einer vollen Cola-Dose ausgetrunken werden, damit die Dose möglichst standfest ist oder – mit anderen Worten – bei welchem Flüssigkeitsstand ist der Schwerpunkt der Dose am niedrigsten?

Kapitel 5

Ziegenaufgabe

Ein Bauer besitzt eine kreisförmige Wiese vom Radius r (Mittelpunkt O). Am Rand der Wiese (auf dem Umfang) wird ein Pflock eingeschlagen. Am Pflock wird mit ein Seil befestigt, am anderen Ende des Seils ist eine Ziege festgebunden.

Aufgabe: Wie lang muss das Seil sein, damit die Ziege genau die Hälfte der runden Wiese abfressen kann?

Kapitel 6

Einsame 8

Aufgabe: Welche Ziffern verbergen sich hinter den X?

```
XXXXXXXX : XXX = XX8XX
 XXX
----
  XXXX
   XXX
  ----
    XXXX
    XXXX
    ----
       0
```

Kapitel 7

Falsche Kugel

Es sind 14 Kugeln vorhanden. Eine (besonders gekennzeichnete) Kugel hat ein korrektes Gewicht. Für die anderen 13 Kugeln gibt es drei Möglichkeiten:

- Alle Kugeln sind gleich schwer (gleiches Gewicht wie die 14.)
- Eine der 13 Kugeln ist schwerer
- Eine der 13 Kugeln ist leichter

Aufgabe: Mit nur drei Wägungen (mit einer Balkenwaage) soll herausgefunden werden, welche dieser Möglchkeiten zutrifft und ggfs. welche der Kugeln schwerer oder leichter ist.

Kapitel 8

Kamel-Transport

Ein Bauer möchte Korn in der 30 km entfernten Stadt verkaufen. Er besitzt 90 Säcke. Sein einziges Kamel kann 30 Säcke auf einmal transportieren und frißt pro km einen Sack Korn.

Aufgabe: Wie muss er es anstellen, um möglichst viel Korn in der Stadt zu verkaufen?

Kapitel 9

Dominosteine-Überhang

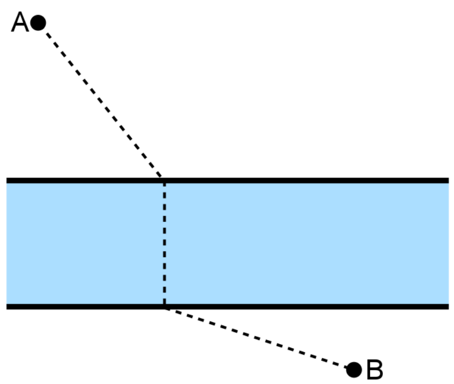
Man baut mit treppenförmig aufeinandergelegten Dominosteinen auf dem Tisch einen Überhang.

Aufgabe(n): Wie müssen die Dominosteine übereinandergeschichtet werden, um einen möglichst großen Bogen zu bilden, ohne dass das Gebilde umkippt?

Welchen Abstand kann der Bogen maximal überbrücken?

Kapitel 10

Kürzester Weg



Es soll eine Straße von A nach B, die durch einen Fluss getrennt sind, gebaut werden. Die Länge dieser Straße soll ein Minimum werden, wobei die Brücke über den Fluss rechtwinklig zu den Ufern verlaufen muss.

Aufgabe: Wie muss die Straße verlaufen? Gesucht wird eine **einfache** und elegante Lösung!

Kapitel 11

Gestrandete Matrosen teilen Nüsse

5 Matrosen stranden auf einer einsamen Insel. Ihre einzige Nahrungsquelle sind Kokosnüsse, die sie gemeinsam während des Tages gesammelt haben und die sie am nächsten Morgen gerecht verteilen wollen.

Der erste Matrose wacht während der Nacht auf, teilt die Nüsse in 5 gleiche Teile, wobei eine Nuss übrig bleibt, die er einem Affen schenkt. Sein Fünftel legt er beiseite, der Rest bleibt liegen.

Nacheinander verhält sich jeder andere Matrose genau so: Er teilt in 5 Teile, schenkt die übrig gebliebene Nuss einem Affen und nimmt sich seinen Anteil.

Am nächsten Morgen wird der noch übrig gebliebene Teil auf alle 5 Matrosen aufgeteilt, diesmal bleibt keine Nuss übrig.

Aufgabe: Welches ist die kleinst mögliche Anzahl an Koksnüssen, die anfangs von allen Matrosen gesammelt wurde?

Kapitel 12

Problem der 100 Gefangenen

Aufgabe: Der Leiter eines Gefängnisses gibt 100 zum Tode verurteilten Gefangenen mit den Nummern von 1 bis 100 eine letzte Chance.

In einem Raum befindet sich ein Schrank mit 100 Schubladen. Der Gefängnisleiter legt in jede Schublade die Nummer genau eines Gefangenen in zufälliger Reihenfolge und schließt die Schubladen daraufhin.

Die Gefangenen betreten den Raum der Reihe nach. Jeder Gefangene darf 50 Schubladen in einer beliebigen Reihenfolge öffnen und muss sie danach mit ihrem Inhalt wieder schließen. Finden dabei alle Gefangenen ihre eigene Nummer in einer der Schubladen, werden die Gefangenen begnadigt. Findet irgendein Gefangener seine Nummer nicht, müssen alle Gefangenen sterben. Bevor der erste Gefangene den Raum betritt, dürfen sich die Gefangenen beraten, danach ist jedoch keinerlei Kommunikation mehr möglich.

Wählt jeder Gefangene seine 50 Schubladen zufällig aus, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelner Gefangener seine Nummer findet, lediglich 50 %. Die Wahrscheinlichkeit, dass alle Gefangenen ihre Nummern finden, ist dann $0,5^{100} \approx 8 \cdot 10^{-31}$, also so gut wie unmöglich, dass die Gefangenen erfolgreich sind.

Gibt es für die Gefangenen eine bessere Strategie und wie sieht diese aus?

Kapitel 13

Das Hutproblem

Drei Kandidaten werden ins Studio geleitet. Sowie einer von ihnen den Raum betritt, setzt die Assistentin des Quizmasters ihm einen Hut auf den Kopf, und zwar einen blauen oder einen roten – mit jeweils 50 % Wahrscheinlichkeit. Der Kandidat hat keine Möglichkeit, seinen Hut zu sehen.
Zu allen dreien sagt der Quizmaster: „Schauen Sie sich die Hüte Ihrer Mitspieler genau an und raten Sie dann, welche Farbe Ihr eigener Hut besitzt. Sie dürfen sich nicht mit Ihrem Mitspielern verständigen, und Sie hören auch deren Antworten nicht“.
Weiter erläutert der Quizmaster: „Sie drei sind ein Team; wenn Sie gewinnen, bekommt jeder 10.000 Euro. Sie dürfen raten oder sich der Stimme enthalten. Zum Gewinnen genügt es, wenn eine richtige Antwort gegen wird, Aber eine falsche Antwort oder falls keiner etwas sagt, und das Geld ist weg“.
Das war die Generalprobe. Die Kandidaten werden in einen Nebenraum entlassen und dürfen sich für das echte Spiel beraten.
Falls einer der Kandidaten rät, besteht eine 50 %ige Chance auf den Gewinn. Kann diese Wahrscheinlichkeit verbessert werden und falls ja, wie?

Teil II

Lösungen

Kapitel 14

e^{π}, π^{e}

14.1 Vorbereitung

Logarithmisches Differenzieren

$$\begin{aligned} y &= h(x)^{g(x)} \\ \ln y &= g(x) \cdot \ln(h(x)) \\ \frac{y'}{y} &= g' \cdot \ln h + g \cdot \frac{h'}{h} \end{aligned}$$

14.2 Lemma 1

Lemma: $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ hat ein Maximum bei e
Beweis:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{\frac{1}{x}} \\ \frac{y'}{y} &= -\frac{1}{x^2} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}, \quad y = x^{\frac{1}{x}} \\ y' &= x^{\frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2} \cdot \ln x + \frac{1}{x^2}) \\ y' &= 0 \quad \Rightarrow \\ x^{\frac{1}{x}} &= 0 \\ \text{oder} & \\ \frac{1}{x^2} &= \frac{\ln x}{x^2} \\ \Rightarrow \quad x = e & \end{aligned}$$

qed.[1]

[1]Der Beweis für ein Maximum fehlt streng genommen noch

14.3 Lösung

$$\begin{aligned}
e^{\frac{1}{e}} &> \pi^{\frac{1}{\pi}}, \qquad \text{wegen Lemma 1} \\
e^{\frac{1}{e}\cdot e\pi} &> \pi^{\frac{1}{\pi}\cdot e\pi} \\
e^{\pi} &> \pi^{e}
\end{aligned}$$

Kapitel 15

Preise in 7-11?

$$
\begin{aligned}
w + x + y + z &= 7,11 \\
wxyz &= 7,11 \\
w, x, y, z &\in \{0,01; 0,02; \ldots; 7,08\}
\end{aligned} \tag{15.1}
$$

oder, um Brüche zu vermeiden:

$$
\begin{aligned}
w + x + y + z &= 711 \\
wxyz &= 711000000 \\
w, x, y, z &\in [1, 708]
\end{aligned} \tag{15.2}
$$

Wegen $711000000 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^6 \cdot 79$
muss einer der Preise (z. B. w) durch 79 (der größten Primzahl) teilbar sein.

Fall I: $w = 1 \cdot 79$

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 632 \\
xyz &= 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^6
\end{aligned} \tag{15.3}
$$

Da die Summe nicht durch 5 teilbar ist, können x, y, z nicht alle durch 5 teilbar sein, also muss das Produkt zweier Preise (z. B. x und y) durch $5^6 = 15625$ teilbar sein. Somit gibt es folgende Fälle:

- Fall IA: $x = 15625x'$
- Fall IB: $x = 4125x'$ und $y = 5y'$
- Fall IC: $x = 625x'$ und $y = 25y'$

- Fall ID: $x = 125x'$ und $y = 125y'$

für $x' \geq 1, y' \geq 1$
Die Fälle IA-IC ergeben jeweils $x + y > 632$, sind also unmöglich. Es bleibt also Fall ID zu prüfen:

$$\begin{aligned} 125(x' + y') + z &= 632 \\ x'y'z &= 2^6 \cdot 3^2 \end{aligned} \tag{15.4}$$

Due erste Gleichung impliziert $x' + y' \leq 5$, sodass man (ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt $x' \leq y'$) folgende Möglichkeiten prüfen muss:

- Fall ID1: $x' = 1$ und $y' = 1$
- Fall ID2: $x' = 1$ und $y' = 2$
- Fall ID3: $x' = 1$ und $y' = 3$
- Fall ID4: $x' = 1$ und $y' = 4$
- Fall ID5: $x' = 2$ und $y' = 2$
- Fall ID6: $x' = 2$ und $y' = 3$

Keiner dieser 6 Fälle ergibt eine Lösung. Für Fall D1 ergibt sich z. B.:

$$\begin{aligned} w &= 79 \\ x &= 125x' = 125 \\ y &= 125y' = 125 \end{aligned} \tag{15.5}$$

woraus folgt: $z = 382$. Dies ergibt zwar die richtige Summe, nicht aber das richtige Produkt.

Fall II: $w = 2 \cdot 79$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 553 \\ xyz &= 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^6 \end{aligned} \tag{15.6}$$

Mit analogen Überlegungen wie eben gilt: $x = 125x'$ und $y = 125y'$ sowie $125(x' + y') + z = 553$ und somit $x' + y' \leq 4$. Keine der Möglichkeiten

- $x' = 1$ und $y' = 1$
- $x' = 1$ und $y' = 2$
- $x' = 1$ und $y' = 3$
- $x' = 2$ und $y' = 2$

führt zu einer Lösung.

Fälle III-VII: $w = 3 \cdot 79, w = 5 \cdot 79, w = 6 \cdot 79, w = 7 \cdot 79, w = 8 \cdot 79$ Man kann leicht nachprüfen, dass auch diese Möglichkeiten keine Lösung ergeben, also bleibt nur noch

Fall VIII: $w = 4 \cdot 79$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 395 \\ xyz &= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^6 \end{aligned} \tag{15.7}$$

Auch hier gibt es wieder einige Fälle zu unterscheiden. Da die Summe der drei Werte durch 5 teilbar ist, muss entweder ein Wert durch 5 teilbar sein oder alle drei müssen durch 5 teilbar sein. Falls nur eine Variable, z. B. x, durch 5 teilbar ist, gilt $x = 5^6 x'$ und man erhält den Widerspruch $x > 395$. Also müssen x, y und z durch 5 teilbar sein: $x = 5x'$, $y = 5y'$ und $z = 5z'$ und somit

$$\begin{aligned} x' + y' + z' &= 79 \\ x'y'z' &= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \end{aligned} \tag{15.8}$$

Mindestens eine der Variablen x', y', z' ist wegen $x' + y' + z' = 79$ nicht durch 5 teilbar, also muss eine andere Variable durch 25 teilbar sein, z. B. x':

$$\begin{aligned} x' &= 25x'' \\ 25x'' + y' + z' &= 79 \\ x''y'z' &= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720 \end{aligned} \tag{15.9}$$

Daraus folgt, das x'' entweder gleich 1 oder 2 oder 3 ist (ansonsten wäre $25x'' > 79$). Die letzten beiden Möglichkeiten führen zu keiner Lösung, bleibt also $x'' = 1$, d. h. $x = 125$. Also:

$$\begin{aligned} y' + z' &= 54 \\ y'z' &= 720 \end{aligned} \tag{15.10}$$

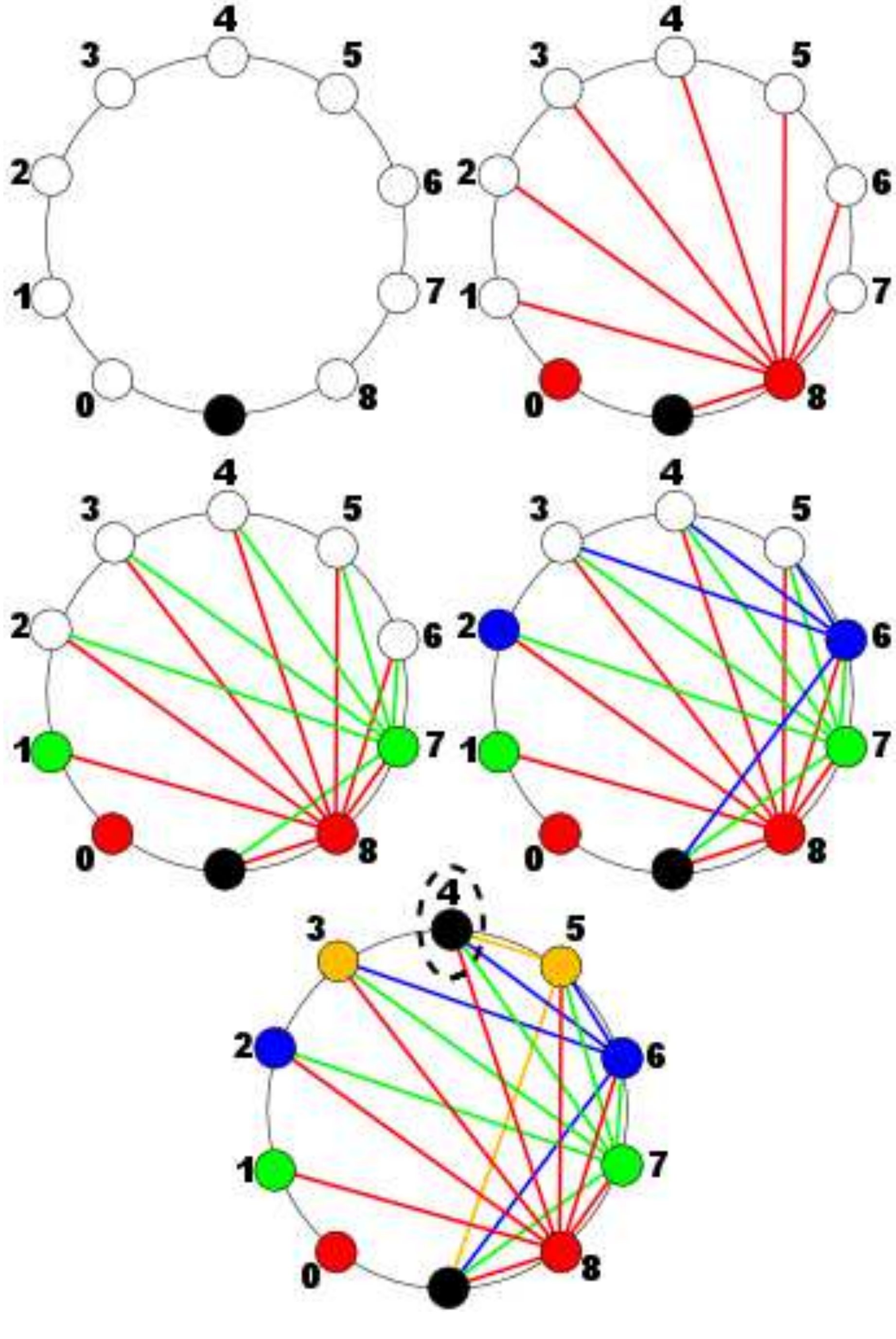
Daraus folgt: $y' = 24$ und $z' = 30$ oder umgekeht. Also $y = 5 \cdot 24 = 120$ und $z5 \cdot 30 = 150$. Somit lautet die eindeutige Lösung:

$$\begin{aligned} w &= 3,16\$ \\ x &= 1,25\$ \\ y &= 1,20\$ \\ z &= 1,50\$ \end{aligned} \tag{15.11}$$

Kapitel 16

Händeschütteln

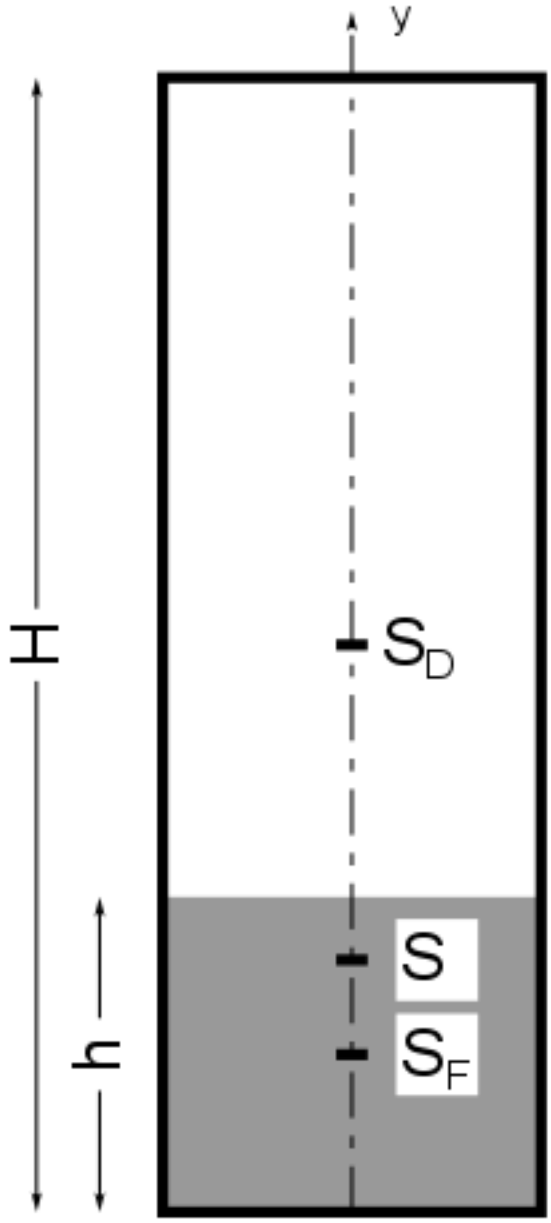
Die folgenden fünf Skizzen zeigen den Lösungsweg auf, wobei die kleinen Kreise die 10 Personen darstellen, die Zahlen geben die (verschiedenen) Anzahlen des Handgebens an und gleiche Farbkreise sind jeweils Paare.


4
3
5
2
6
1
7
0
8
4
3
5
2
6
1
7
0
8
4
3
5
2
6
1
7
0
8
4
3
5
2
6
1
7
0
8
4
3
5
2
6
1
7
0
8

Kapitel 17

Standfeste Cola-Dose

17.1 Analytische Lösung



Mit

Bezeichnung	**Bedeutung**
H	Höhe der Cola-Dose
h	Höhe des Füssigkeitsspiegels
S_D	Schwerpunkt der leeren Dose
S_F	Schwerpunkt der Cola bei Füllhöhe h
S	Gemeinsamer Schwerpubnkt von Cola und Dose
y_S	Lage des momentanen gemeinsamen Schwerpunktes
A	Querschnittsfläche der Dose
ρ	Dichte der Cola
m_D	Masse der leeren Cola-Dose
$M_F = \rho A H$	Masse der Cola-Flüssigkeit, wenn die Dose ganz gefüllt ist
$m_F = \rho A h$	Masse der Cola-Flüssigkeit, wenn die Dose bis zur Höhe h gefüllt ist

gilt für den momentanen Schwerpunkt:

$$y_S = \frac{m_D \cdot \frac{H}{2} + m_F \cdot \frac{h}{2}}{m_D + m_F} \tag{17.1}$$

Aus $y'_S(h) = 0$ ergibt sich:

$$h = \frac{-m_D + \sqrt{m_D^2 + \rho A m_D H}}{\rho A} \overset{\rho A = \frac{M_F}{H}}{=} \frac{m_D(\sqrt{1 + \frac{M_F}{m_D}} - 1)}{\frac{M_F}{H}} = \frac{m_D}{M_F}(\sqrt{1 + \frac{M_F}{m_D}} - 1)H \tag{17.2}$$

17.2 Gedankenexperiment

Mit Hilfe des folgenden Gedankenexperimentes kann man sich klarmachen, dass der Gesamtschwerpunkt genau dann am tiefsten liegt, wenn er im Flüssigkeitsspiegel liegt.

Die leere Dose hat ihren Schwerpunkt in halber Dosenhöhe ($\frac{H}{2}$). Steigt nun der Colaspiegel an, dann sinkt der Gesamtschwerpunkt von $\frac{H}{2}$ auf einen Minimalwert und kommt bei gefüllter Dose schließlich wieder bei $\frac{H}{2}$ an. Irgendwann liegt also der Gesamtschwerpunkt genau im Colaspiegel. Nun stellt man sich genau in diesem Moment die Cola erstarrt vor. Man kann jetzt an der Grenze zwischen Cola und Luftraum die Dose auf einer Schneide ausbalancieren. Auf der linken Seite soll die Cola und auf der rechten Seite die Luft in der Dose sein.

Fügt man nun nur eine dünne Scheibe starrer Cola zu, dann verlagert sich der Gesamtschwerpunkt nach rechts in Richtung Dosenmitte. Also liegt der tiefste Gesamtschwerpunkt genau im Colaspiegel. Damit kann jene Höhe der Cola ermittelt werden, bei der der Gesamtschwerpunkt am tiefsten liegt:

$$h = \frac{m_D \cdot \frac{H}{2} + m_F \cdot \frac{h}{2}}{m_D + m_F} \tag{17.3}$$

Also das gleiche Ergebnis.

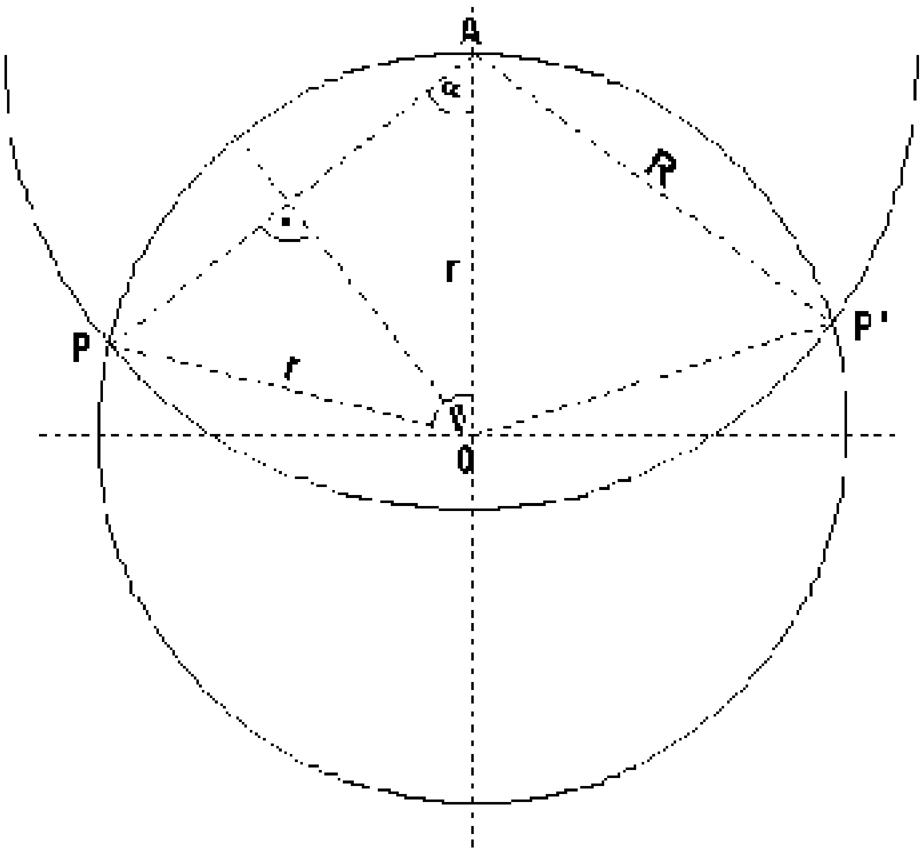
17.3 Werte-Beispiel

Mit $M_F = 300g$ und $m_D = 100g$ erhält man: $h \approx 0,3 \cdot H$. Man muss also ca. $\frac{2}{3}$ des Inhalts austrinken, damit die Dose das beste Standvermögen hat.

Kapitel 18

Ziegenaufgabe

18.1 Skizze



Graskreis: Radius r ($\overline{OA}$)
Pflock: A

Ziegenkreis: Radius R ($\overline{AP}$ bzw. $\overline{AP'}$)

18.2 Lösung

Definitionen:

Buchstabe	**Bedeutung**
G	Gras
Z	Ziege
Dr	Dreieck
Kr	Kreis
Sk	Sektor
Sg	Segment

Lösungsweg:

$$\beta = \pi - 2\alpha \tag{18.1}$$

$$\cos\alpha = \frac{R}{2r} \tag{18.2}$$

$$A_G(Dr\,OAP) = \frac{r \cdot h_r}{2} = \frac{r^2 \cdot \sin(\pi - 2\alpha)}{2} \tag{18.3}$$

$$A_G(Kr) = r^2 \cdot \pi \tag{18.4}$$

$$\begin{aligned} A_Z(Sk\,APP') &= \frac{2R \cdot 2R \cdot \pi \cdot 2\alpha}{4 \cdot 2\pi} = \\ &= R^2 \cdot \alpha \end{aligned} \tag{18.5}$$

$$\begin{aligned} A_G(Sg\,OAP') &= A_G(Sk\,OAP') - A_G(Dr\,OAP) = \\ &= \frac{r^2 \cdot (\pi - 2\alpha)}{2} - \frac{r^2 \cdot \sin(\pi - 2\alpha)}{2} \end{aligned} \tag{18.6}$$

$$\begin{aligned} A_Z &= A_Z(Sk\,APP') + 2 \cdot A_G(Sg\,OAP') = \\ &= R^2\alpha + r^2\left[\pi - 2\alpha - \sin(2\alpha)\right] = \\ &= (4r^2 \cdot \cos^2\alpha)\alpha + r^2\left[\pi - 2\alpha - \sin(2\alpha)\right] \end{aligned} \tag{18.7}$$

$$\begin{aligned} A_Z &= \frac{A_G(Kr)}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4r^2\alpha\cos^2\alpha + r^2\left[\pi - 2\alpha - \sin(2\alpha)\right] = \frac{r^2 \cdot \pi}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4\alpha\cos^2\alpha + \frac{\pi}{2} - 2\alpha - \sin(2\alpha) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha \approx 0,953 \Rightarrow \cos\alpha \approx 0,579 \Rightarrow R \approx 1,158r \end{aligned} \tag{18.8}$$

Kapitel 19

Einsame 8

Lösung (durch Kombinieren und [minimal] Probieren):

`10020316 : 124 = 80809`

Kapitel 20

Falsche Kugel

Sei 0 die korrekte Kugel und A, B, . . . ,M die 13 zu testenden Kugeln und weiter (i-xy) die i-te Wägung und xy die Ergebnisse der (i-2)-ten bzw. (i-1)-ten Wägung, mit i = 1, 2, 3 und x,y = s, l oder g (linke Seite der Balkenwaage schwerer, leichter oder gleich schwer).

1. Wägung	(1):	0 A B C D	—	E F G H I

	(2-s):	A E F	—	B G H
2. Wägung	(2-g):	0 J	—	K L
	(2-l):	A E F	—	B G H

	(3-ss):	G	—	H
	(3-sg):	C	—	D
	(3-sl):	E	—	F
	(3-gs):	K	—	L
3. Wägung	(3-gg):	0	—	M
	(3-gl):	K	—	L
	(3-ls):	E	—	F
	(3-lg):	C	—	D
	(3-ll):	G	—	H

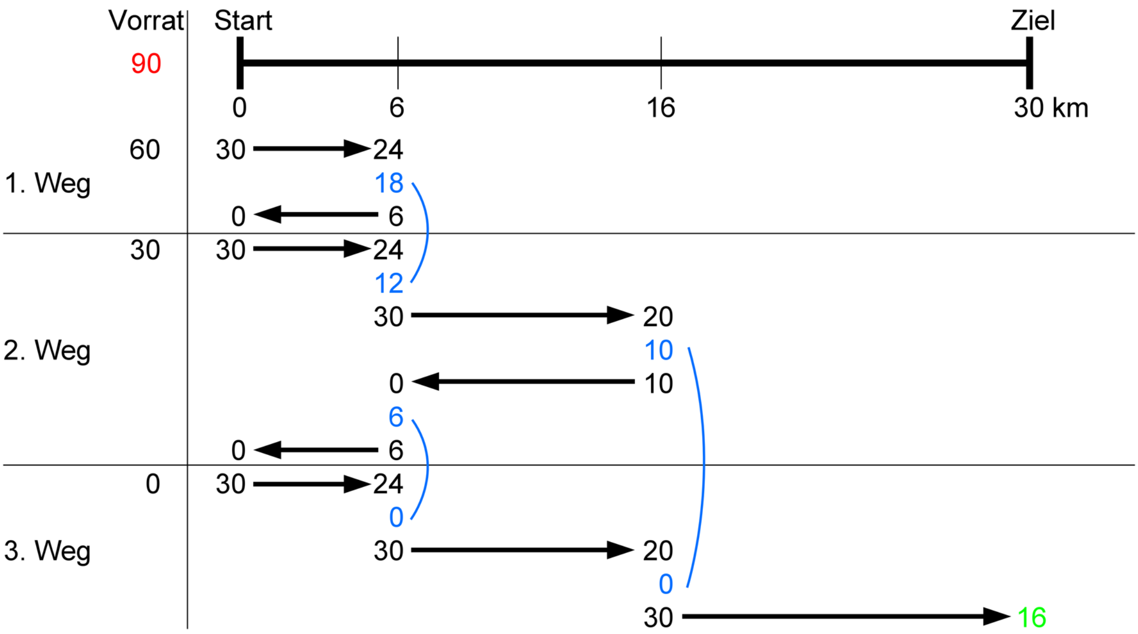
	(sss):	H ist leichter
	(ssg):	A ist schwerer
	(ssl):	G ist leichter
	(sgs):	C ist schwerer
	(sgg):	I ist leichter
	(sgl):	D ist schwerer
	(sls):	F ist leichter
	(slg):	B ist schwerer
	(sll):	E ist leichter
	(gss):	L ist leichter
	(gsg):	J ist schwerer
	(gsl):	K ist leichter
	(ggs):	M ist leichter
Ergebnisse	(ggg):	alle Kugeln gleich schwer
	(ggl):	M ist schwerer
	(gls):	K ist schwerer
	(glg):	J ist leichter
	(gll):	L ist schwerer
	(lss):	E ist schwerer
	(lsg):	B ist leichter
	(lsl):	F ist schwerer
	(lgs):	D ist leichter
	(lgg):	I ist schwerer
	(lgl):	C ist leichter
	(lls):	G ist schwerer
	(llg):	A ist leichter
	(lll):	H ist schwerer

Kapitel 21

Kamel-Transport

Die folgende Skizze zeigt das Vorgehen des Bauern.

21.1 Skizze



Kapitel 22

Dominosteine-Überhang

Den optimalen Bogen erhält man, wenn die Dominosteine so gelegt werden, dass der (Gesamt-)Schwerpunkt aller oberen Steine genau über der Endkante des jeweils unteren Dominosteins zu liegen kommt.

Die Dominosteine seien 2 Einheiten lang.
Man beginnt mit dem „obersten“ Dominostein und legt den nächsten um 1 Einheit verschoben darunter. Die nächsten Steine werden jeweils um $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... Einheit verschoben darunter gelegt. Die folgende Skizze zeigt das Prinzip.

Es soll nun bewiesen werden, dass das ganze Gebilde auch stabil ist, d. h. der gesamte Massenschwerpunkt der n Domino-Steine muss genau über der rechten Kante des nächsten Domino-Steins liegen. Seien SPD_i der Schwerpunkt des i-ten Dominosteins und SP_n der Gesamt-Schwerpunkt der ersten n Dominosteine.

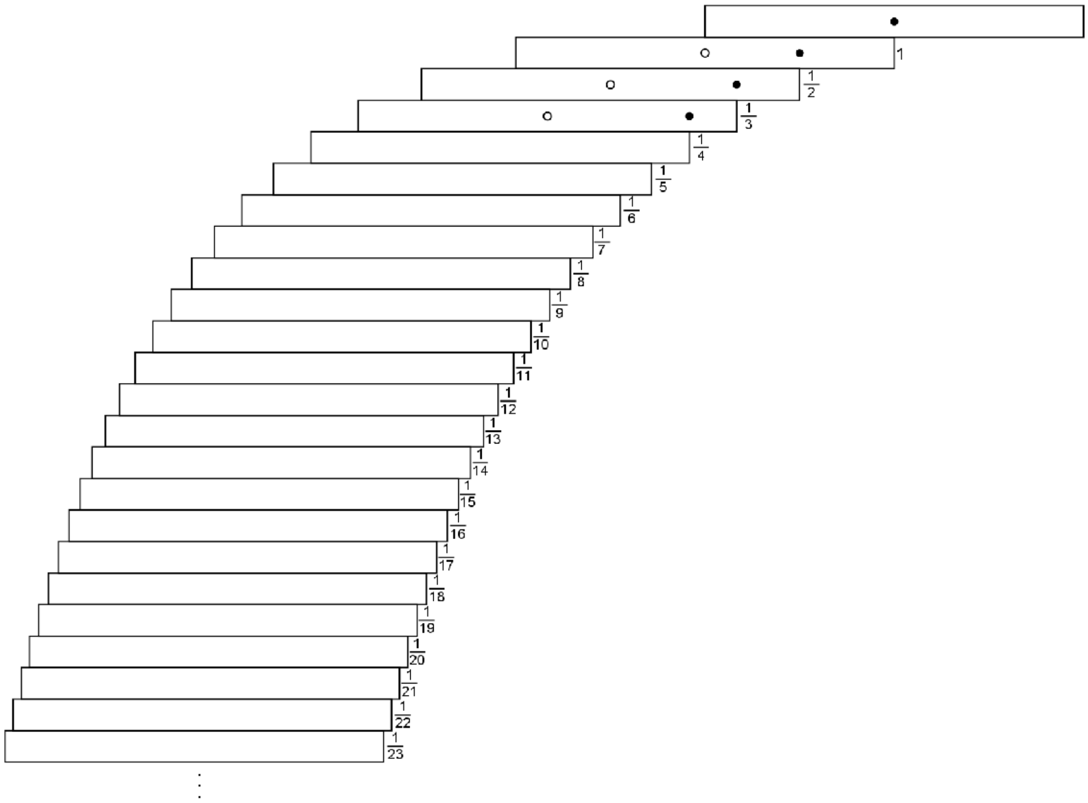
$$\begin{aligned}
SP_n &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} SPD_i \\
SP_n &= \frac{1}{n}[SPD_1 + SPD_2 + SPD_3 + \ldots + SPD_n] \\
SP_n &= \frac{1}{n}[(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}) + \\
&+ (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}) + (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}) + \\
&+ (\ldots) + (1 + \frac{1}{n})] \\
SP_n &= \frac{1}{n}[n \cdot 1 + 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{3} + \ldots + n \cdots \frac{1}{n}] \\
SP_n &= \frac{1}{n}[n + \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}\, n - mal]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SP_n &= \frac{1}{n}[n+n] \\ SP_n &= 2 \end{aligned} \tag{22.1}$$

qed.

Die Summe der sog. harmonischen Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ divergiert, d. h. sie wächst beliebig. Man kann also eine beliebig große Entfernung überbrücken.

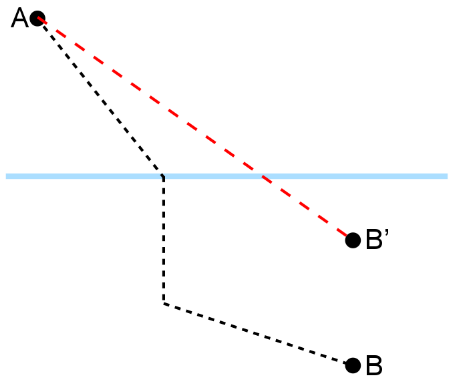
22.1 Skizze


1
1/2
1/3
1/4
1/5
1/6
1/7
1/8
1/9
1/10
1/11
1/12
1/13
1/14
1/15
1/16
1/17
1/18
1/19
1/20
1/21
1/22
1/23

Kapitel 23

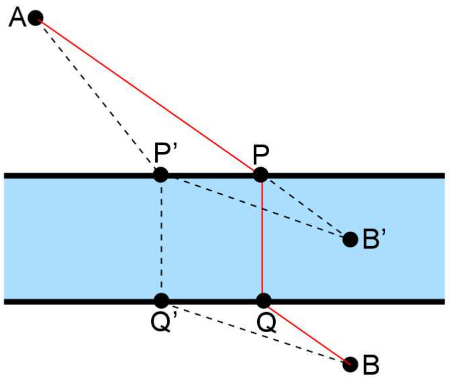
Kürzester Weg

Die Dinge werden viel einfacher, sofern man sich auf die wichtigen Teile des Models konzentriert und „Störungen“ – solche Elemente, die den Pfad zum Ziel blockieren – ignoriert. Angenommen, es gibt keinen Fluss.



Der Fluss wird auf eine Linie (mit der Breite Null) reduziert und B wird um die Breite des Original-Flusses nach oben verschoben. Nun ist das Problem extrem einfach zu lösen: eine gerade Linie zwischen A und B!

Diese Lösung impliziert auch die Lösung des Original-Problems. Die Linie zwischen A und B' kreuzt das Fluss-Ufer an einem Punkt P. Dies ist der Punkt, wo die Brücke gebaut werden sollte.



Die Segmente QB und AP sind parallel, sodass die gesamte Distanz

$$AP + PQ + QB$$

die kürzest mögliche ist.
Beweis:
Für eine beliebige andere Verbindung, z. B. $A - P' - Q' - B$ gilt:

$$AP' + P'Q' + Q'B = AP' + P'Q' + P'B' >$$
$$AB' + P'Q' = AP + PQ + PB' = AP + PQ + QB$$

wegen $P'Q' = PQ$ und $AP' + P'B' > AB'$ (Dreieck-Seiten-Ungleichung)

Kapitel 24

Gestrandete Matrosen teilen Nüsse

Seien $5x$ die Anzahl der am Morgen übrig gebliebenen Nüsse und y die Anzahl der am Vortag insgesamt gesammelten Nüsse.

Nachdem der erste Matrose die Nüsse geteilt hat, bleiben noch $\frac{4}{5}(y-1)$ übrig. Nach dem zweiten Matrosen sind es: $\frac{4}{5}(\frac{4}{5}(y-1)-1)$
und nach dem fünften schließlich:
$\frac{4}{5}(\frac{4}{5}(\frac{4}{5}(\frac{4}{5}(\frac{4}{5}(y-1)-1)-1)-1)-1)$

Es gilt also:

$$\begin{aligned}
5x &= (\frac{4}{5})^5 y - (\frac{4}{5})^5 - (\frac{4}{5})^4 - \ldots - (\frac{4}{5})^1 \\
5(\frac{5}{4})^5 x &= y - 1 - \frac{5}{4} - (\frac{5}{4})^2 - \ldots - (\frac{5}{4})^4 \\
&= y - \sum_{i=0}^{4} (\frac{5}{4})^i
\end{aligned}$$

Durch Anwendung der Summenformel für eine geometrische Reihe ergibt sich:

$$\begin{aligned}
5(\frac{5}{4})^5 x &= y - \frac{1-(\frac{5}{4})^5}{1-\frac{5}{4}} \\
&= y - 4(\frac{5}{4})^5 - 4
\end{aligned}$$

und nach y umgestellt schließlich:

$$y = 5(\frac{5}{4})^5 x + 4(\frac{5}{4})^5 - 4$$

$$
\begin{aligned}
&= (\frac{5}{4})^5(5x+4)-4 \\
&= \frac{5^5}{1024}(5x+4)-4
\end{aligned}
$$

Da y ganzzahlig sein muss, muss $5x+4$ durch 1024 (ohne Rest) teilbar sein, also folgende Form besitzen: $5x+4=1024n$.

Diese Gleichung ist eine diophantische Gleichung, die wie folgt gelöst wird:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1024n-4}{5} = 204n + \underbrace{\frac{4n-4}{4}}_{=a} \\
n &= \frac{5a+4}{4} = a+1+\underbrace{\frac{a}{4}}_{=b} \\
a &= 4b \\
n &= \frac{5\cdot 4b+4}{4} = 5b+1 \\
x &= \frac{1024(5b+1)-4}{5} = 1024b+204 \\
1024n &= 5(1024b+204)+4 \\
n &= 5b+1 \\
n &= 1, 6, 11, \ldots
\end{aligned}
$$

Gesucht wird die kleinste Lösung, demnach $n=1$ und $5x=1020$ und schließlich die Lösung:

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{5^5}{1024}(5x+4)-4 \\
y &= \frac{5^5}{1024}1024-4 = 5^5-4 = 3121
\end{aligned}
$$

Die Matrosen hatten also am ersten Tag insgesamt 3121 Nüsse gesammelt.

Kapitel 25

Problem der 100 Gefangenen

25.1 Lösung

1. Die Schubladen werden von den Gefangenen gedanklich mit den Zahlen von 1 bis 100 durchnummeriert.

2. Jeder Gefangene öffnet als erstes die Schublade mit seiner eigenen Nummer.

3. Befindet sich seine Nummer in dieser Schublade, dann ist er mit der Suche fertig und war erfolgreich.

4. Anderenfalls befindet sich in der Schublade die Nummer eines anderen Gefangenen, und er öffnet danach die Schublade mit dieser Nummer.

5. Die Schritte 3 und 4 werden vom Gefangenen wiederholt, bis er seine eigene Nummer gefunden hat.

Auf diese Weise findet der Gefangene garantiert seine Nummer. Weil er aber nur 50 Schubladen öffnen darf, ist dieses Verfahren nur unter einer bestimmten Voraussetzung erfolgreich.

Die 100 Nummern können auf 100! verschiedene Weisen (Permutationen) verteilt werden, wobei jede Permutation durch einen Zyklus oder mehrere Zyklen geschrieben werden kann.
Die Gefangenen sind genau dann mit ihrem Verfahren erfolgreich, wenn kein Zyklus aus mehr als 50 Ziffern besteht. Also hängt die Erfolgswahrscheinlichkeit für die Gefangenen nur von der Wahrscheinlichkeit einer Permutation ohne Zyklen > 50 ab.
Diese errechnet sich wie folgt:

1. Eine Permutation von 100 Zahlen kann nur maximal einen Zyklus der Länge $l > 50$ besitzen.

2. Es gibt genau $\binom{100}{l}$ Möglichkeiten, einen derartigen Zyklus auszuwählen.

3. Die Zahlen in diesem Zyklus lassen sich auf $l!$ Weisen anordnen, wobei sich aber jeweils l Möglichkeiten nur durch die Anfangszahl unterscheiden, sodass es insgesamt nur $(l-1)!$ Möglichkeiten gibt.

4. Die verbleibenden $(100-l)$ Zahlen lassen sich auf $(100-l)!$ Arten anordnen.

5. Es gibt also insgesamt $\binom{100}{l} \cdot (l-1)! \cdot (100-l)! = \frac{100! \cdot (l-1)! \cdot (100-l)!}{l! \cdot (100-l)!} = \frac{100!}{l}$ Möglichkeiten

6. Da es insgesamt 100! Permutationen gibt, ist die Wahrscheinlichkeit für einen Zyklus der Länge l also $\frac{100!}{l \cdot 100!} = \frac{1}{l}$

7. Die Wahrscheinlichkeit, dass es **keinen** Zyklus mit einer Länge $l > 50$ gibt, betr"agt dann: $1 - \frac{1}{100!}(\frac{100!}{51} + \cdots + \frac{100!}{100}) = 1 - (\frac{1}{51} + \cdots + \frac{1}{100})$

8. Mit einem kleinen Programm[1] ergibt sich: $1 - 0,688 = 0,312$

9. Also beträgt die Erfolgswahrscheinlichkeit der Gefangenen rund 31 %.

25.2 Alternative (Näherungs-)Berechnung

Mit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$
und der Näherung $H_n \approx \ln n + \gamma$ mit der Euler-Mascheroni-Konstante γ,
$\gamma = 0,5772156649\ldots$ ergibt sich:

$1-(\frac{1}{51}+\cdots+\frac{1}{100}) = 1-(H_{100}-H_{50}) \approx 1-(\ln 100-\ln 50) \approx 1-4,605+3,912 =$
$= 0,307$

[1]Python 1-zeiler: `print (1-sum([1/x for x in range(51,101)]))`

Kapitel 26

Das Hutproblem

Mit dem folgenden Rezept kann die Wahrscheinlichkeit auf 75 % gesteigert werden.
Jeder schaut sich die Hüte seiner Mitspieler an. Sind diese von verschiedener Farbe, so hält er den Mund. Sind sie aber gleichfarbig, dann behauptet er, sein Hut sei von der entgegengesetzten Farbe.
Es gibt folgende 8 Fälle:

1. rot - rot - rot
2. rot - rot - blau
3. rot - blau - rot
4. rot - blau - blau
5. blau - rot - rot
6. blau - rot - blau
7. blau - blau - rot
8. blau - blau - blau

Im ersten und letzten Fall verlieren die Kandidaten, in den andern sechs Fällen gewinnen sie aber $\Rightarrow \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 75\%$